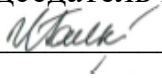


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ»
ПЕРМСКИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ –
ФИЛИАЛ ФИНУНИВЕРСИТЕТА

РАССМОТРЕНО
на заседании ПЦК
информационных систем и
программирования
Протокол № 6 от «24» января 2024 г.
Председатель ПЦК
 /И.В. Галкин

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
по дисциплине «Численные методы»
по теме «Элементы теории погрешностей»
для специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование**

г. Пермь, 2024 г.

Разработчик:

Виноградова Н.А., преподаватель высшей квалификационной категории
Пермского филиала Финуниверситета

Рецензент: Ставицкая Е.А., преподаватель первой категории Пермского
филиала Финуниверситета

Одобрено Научно-методическим советом филиала
Протокол № 3 от «28» марта 2024 г.

Содержание

Пояснительная записка	3
Практическая работа 1. Вычисление результатов арифметических действий с учетом погрешностей	4
Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий.....	4
Способы приближенных вычислений по заданной формуле	5
Задания практического занятия.....	9
Порядок выполнения задания:	10
Список литературы.....	10

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы» по теме «Элементы теории погрешностей» предназначены для студентов, обучающихся на базе основного и среднего общего образования, по программам подготовки специалистов среднего звена, для специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине ОП.10 Численные методы.

Цель методических рекомендаций: оказание помощи студентам в организации самостоятельного изучения учебного материала в форме практических работ.

В методической работе автором кратко излагается теоретический материал, даются рекомендации к выполнению практических заданий.

Практическая работа 1. Вычисление результатов арифметических действий с учетом погрешностей

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Пусть X -точное значение некоторой величины, x - наилучшее приближение этой величины. Определение: Абсолютной погрешностью e_x приближенного значения числа X называется модуль разности между точным числом X его приближенным значением x , т.е.

$$e_x = |X - x|.$$

Определение: Число x называется приближенным значением точного числа X с точностью до x , если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает x , т.е.

$$|X - x| \leq \Delta x \quad (1)$$

Определение: Число x называется границей абсолютной погрешности приближенного значения числа x .

Число Δx на практике стараются подобрать как можно меньше и простое по записи.

Из неравенства (1) найдем границы, в которых заключено точное значение числа X :

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x.$$

$НГ_x = x - \Delta x$ - нижняя граница приближения величины X . $ВГ_x = x + \Delta x$ - верхняя граница приближения величины X .

Определение: Относительной погрешностью δx приближенного числа x числа X называется отношение абсолютной погрешности Δx этого приближения к числу x , т.е.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности δx меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства:

$$\delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$$

где n -количество верных цифр.

Таблица 1. Вычисление погрешностей арифметических действий:

$x \# y$	$\Delta(x \# y)$	$\Delta(x \# y)$
$x + y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x + y } \delta x + \frac{ y }{ x + y } \delta y$
$x - y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x - y } \delta x + \frac{ y }{ x - y } \delta y$
xy	$ x \Delta y + y \Delta x$	$\delta x + \delta y$
x/y	$\frac{ x \Delta y + y \Delta x}{y^2}$	$\delta x + \delta y$

Таблица 2. Оценка погрешностей значений функций

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\delta f(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2} \delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	δx
$\sin x$	$ \cos x \cdot \Delta x$	$ x \operatorname{ctgx} \cdot \delta x$
$\cos x$	$ \sin x \cdot \Delta x$	$ x \operatorname{tgx} \cdot \delta x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 x }{ \sin 2x } \cdot \delta x$
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{ \ln x }$
$\lg x$	$\frac{\Delta x}{x \ln 10}$	$\frac{\delta x}{ \lg x } \cdot \ln 10$
e^x	$e^x \Delta x$	$ x \cdot \delta x$
$\arcsin x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arcsin x \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
$\arccos x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arccos x \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{ x }{ \operatorname{arctgx} \sqrt{1+x^2}} \cdot \delta x$
x^y	$x^y \left(y \frac{\Delta x}{x} + \ln x \cdot \Delta y \right)$	$ y \ln x \cdot \delta y + y \cdot \delta x$

Способы приближенных вычислений по заданной формуле

1. Вычисление по правилам подсчета цифр

При вычислении данным методом явного учета погрешностей не ведется, правила подсчета цифр показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надежными.

Правила метода:

- При сложении и вычитании приближенных чисел следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.
- При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.
- При определении количества верных цифр в значениях функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных

десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной.

- В записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем описано в правилах 1-3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

Правила подсчета цифр носят оценочный характер, но практическая надежность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчетная таблица – расписка формул.

Пример:

Вычислить значение функции:

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}, \quad a = 2,156, \quad b = 0,927.$$

a	2,156	пояснения при подсчете верных цифр
b	0,927	
e^a	8,637	$e^a = e^{2,156} = 8,63652$, оценим производную $(e^a)' = e^a \approx 2^{2,156} \approx 5... < 10$, значит (используя правило 3), надо сохранить на один знак меньше, чем в значении аргумента + 1 запасная цифра.
$\sqrt{b}$	0,9628	$\sqrt{b} = 0,9628083$, оценим производную $(\sqrt{b})' = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{0,927}} < 1$, (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
$e^a + \sqrt{b}$	9,600	$e^a + \sqrt{b} = 8,637 + 0,9628 = 9,5998$, (по правилу 1) результат округляется до трех знаков после запятой, т.е. 9,600.
b^2	0,8593	$b^2 = 0,927^2 = 0,859329$, (по правилу 2) результат округляем до трех цифр, как аргумент + 1 запасная цифра.
$a + b^2$	3,0153	$a + b^2 = 2,156 + 0,8593 = 3,0153$, (используя правило 1) округляем результат до трех цифр + 1 запасная цифра.
$\ln(a + b^2)$	1,1037	$\ln(a + b^2) = \ln(3,0153) \approx 1,10369933$, оценим производную $(\ln(a + b^2))' = \frac{1}{a + b^2} = \frac{1}{3,0153} < 1$, (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
A	8,698	$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)} = \frac{9,600}{1,1037} \approx 8,698$, при округлении результата использовали правило 2.
A	8,70	8-запасная цифра, По правилу 4, запасная цифра в окончательном результате округляется $8,698 \approx 8,70$

2. Вычисление со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей. При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты,

так же, как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей – для результатов и их погрешностей. В таблице приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в предыдущем примере, и в предположении, что исходные данные a и b имеют предельные абсолютные погрешности $\Delta a = \Delta b = 0,0005$, т.е. у a и b все цифры верны.

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры; значения погрешностей для удобства округляются (*с возрастанием!*) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе.

Пример:

Вычислить значение функции:

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}, \quad a = 2,156, \quad b = 0,927.$$

a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	b^2	$a + b^2$	$\ln(a + b^2)$	A
2,156	0,927	8,637	0,9628	9,603	0,860	3,016	1,104	8,70
Δa	Δb	$\Delta(e^a)$	$\Delta(\sqrt{b})$	$\Delta(e^a + \sqrt{b})$	$\Delta(b^2)$	$\Delta(a + b^2)$	$\Delta \ln(a + b^2)$	ΔA
0,0005	0,0005	0,0049	0,00027	0,0054	0,0016	0,0021	0,00076	0,016

Используя калькулятор, имеем $e^{2,156} = 8,63652$.

При вычислении предельных абсолютных погрешностей используем таблицу:

$$\Delta(e^a) = e^a \cdot \Delta a = e^{2,156} \cdot 0,0005 = 0,0043182 \approx 0,0044.$$

Судя по ее величине, в полученном значении экспоненты в строгом смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой: $e^{2,156} \approx 8,637$ и вносим его в таблицу.

При этом возникает погрешность округления: $8,637 - 8,63652 = 0,00048$.

Вслед за этим вычисляем полную погрешность полученного результата (погрешность действия плюс погрешность округления: $0,0044 + 0,00048 = 0,0049$), которую так же вносим в таблицу.

Все последующие действия выполняем аналогично с применением соответствующих формул для предельных абсолютных погрешностей.

Округляя окончательный результат до последней верной в строгом смысле цифры, а так же округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем: $A = 8,7 \pm 0,1$.

Вычисления по методу строго учета предельных абсолютных погрешностей можно выполнить на компьютере с помощью программы. Если не производить пооперационного учета движения вычислительной ошибки, то достаточно вычислить значение предельной абсолютной погрешности окончательного результата, а затем произвести его округление.

3. Вычисление по методу границ

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений – *метод границ*.

Пусть $f(x, y)$ – функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y . Нужно получить ее значение $f(a, b)$, где a и b – приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$$H\Gamma_a < a < B\Gamma_a;$$

$$H\Gamma_b < b < B\Gamma_b.$$

Здесь НГ, ВГ - обозначение соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения (а, b) при известных границах значений а и b.

Допустим, что функция $f(x, y)$ возрастает по каждому из аргументов x и y. Тогда

$$f(НГ_a, НГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, ВГ_b).$$

Пусть теперь $f(x, y)$ возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано неравенство

$$f(НГ_a, ВГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, НГ_b).$$

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий.

Пусть $f_1(x, y) = x + y$. Тогда очевидно, что

$$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b.$$

Точно так же для функции $f_2(x, y) = x - y$ (она по x возрастает, а по y убывает) имеем

$$НГ_a - ВГ_b < a - b < ВГ_a - НГ_b.$$

Аналогично для

$$\text{умножения и деления:}$$

$$НГ_a \cdot НГ_b < a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b;$$

$$\frac{НГ_a}{ВГ_b} < \frac{a}{b} < \frac{ВГ_a}{НГ_b}$$

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк – отдельно для вычисления НГ и ВГ результата (по этой причине метод границ называют еще методом двоичных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних по – избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

Пример:

Вычислить значение функции

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}, \quad a = 2,156, \quad b = 0,927.$$

Нижняя и верхняя границы значений а и b определены из условия, что в исходных данных $a = 2,156$ и $b = 0,927$ все цифры верны ($\Delta a = \Delta b = 0,0005$),

$$\text{т.е. } 2,1555 < a < 2,1565; \quad 0,9265 < b < 0,9275.$$

	a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	b^2	$a + b^2$	$\ln(a + b^2)$	A
НГ	2,1555	0,9265	8,63220	0,96255	9,59475	0,85840	3,01434	1,10338	8,6894
ВГ	2,1565	0,9275	8,64084	0,96307	9,60391	0,86026	3,01676	1,10419	8,7041

Таким образом, результат вычислений значения A по методу границ имеет вид:

$$8,6894 < A < 8,7041.$$

По результатам вычислений получаем:

$$A = \frac{8,6894 + 8,7041}{2} = 8,69675; \quad \Delta A = \frac{8,7041 - 8,6894}{2} = 0,00735,$$

что дает $A = 8,697 \pm 0,008$, или при записи верными цифрами, $A=8,7 \pm 0,01$.

Задания практического занятия

Задание 1.

Вычислите значение величины Z при заданных значениях параметров a , b и c , используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

- 1) по правилам подсчета цифр;
- 2) с систематическим учетом границ абсолютных погрешностей;
- 3) по способу границ.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

Сделать обоснованный вывод о целесообразности и эффективности использования тех или иных методов и средств вычислений.

Номер варианта	Z	a	b	c
1	$\frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	3,4	6,22	0,149
2	$\frac{(b-c)^2}{2a+b}$	4,05	6,723	0,03254
3	$\frac{\ln b - a}{a^2 + 12c}$	0,7219	135,347	0,013
4	$\frac{b - \sin \alpha}{+ 3c}$	3,672	4,63	0,0278
5	$\frac{10c + \sqrt{a}}{2 - b}$	1,24734	0,346	0,051
6	$\frac{(a - \sqrt[3]{a} + \sqrt{b})}{3b}$	11,7	0,0937	5,081
7	$\frac{a - \sin b}{b^2 + 6c}$	1,75	1,21	0,041
8	$\frac{\sqrt{b-c}}{\ln a + b}$	18,0354	3,7251	0,071
9	$\frac{\ln c - 10a}{\sqrt{bc}}$	0,113	0,1056	89,4
10	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,0399	4,83	0,072
11	$\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	1,574	1,40	1,1236
12	$\frac{ab-4c}{\ln a + b}$	12,72	0,34	0,0290
13	$\frac{a - \cos b}{13c + b}$	3,49	0,845	0,0037
14	$\frac{ac+b}{b-c}$	0,0976	2,371	1,15874

15	$\sqrt{\frac{a + \cos c}{2a + b}}$	0,11587	4,25	3,00971
----	------------------------------------	---------	------	---------

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Список литературы

1. Численные методы : учебное пособие для СПО / А. В. Зенков. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 122 с. — (Серия: Профессиональное образование).
2. Численные методы : учебное пособие для СПО / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 140 с. — (Серия : Профессиональное образование)